PROBLEME DE MATEMATICĂ CU SOLUȚII PROGRESIVE SEPARATE: PONTURI, ALGORITMI, DEMONSTRAȚII

VOLUMUL 1 – ALGEBRĂ DE LICEU

Cătălin Bărboianu
Evgheni Tokarev

INFAROM Publishing
Matematică aplicată şi şcolară
office@infarom.ro
http://www.infarom.ro

ISBN 978-973-88662-8-7
ISBN 978-973-1991-00-9

Editura: **INFAROM**
Autori: **Cătălin Bărboianu, Evgheni Tokarev**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

BĂRBOIANU, CĂTĂLIN
Probleme de matematică cu soluții progresive separate : ponturi, algoritmi, demonstrații /
Cătălin Bărboianu, Evgheni Tokarev. -Craiova : Infarom, 2008
vol.
ISBN 978-973-88662-8-7
Vol. 1 : Algebră de liceu. - 2008. - Bibliogr. . - Index.
- ISBN 978-973-1991-00-9

I. Tokarev, Evgheni

CUPRINS

(numerele paginilor corespund ediției complete)

INTRODUCERE

Rezolvarea de probleme nu este numai o activitate indispensabilă elevilor în procesul didactic şi de dobândire a unei formaţii matematice, dar şi o formă primară a cercetării şi creaţiei matematice.

Propunerea şi rezolvarea de probleme reprezintă un antrenament ştiinţific constant pe care viitorul matematician îl începe la orele de clasă, îl continuă în pregătirea sa individuală pentru şcoală şi concursuri, având drept scop principal autoperfecţionarea în matematică şi chiar îmbrăţişarea unei cariere ştiinţifice în acest domeniu.

Pentru rezolvitorii de probleme, acest antrenament intra şi extraşcolar este cel mai important mod de a-şi dezvolta unele abilităţi esenţiale pentru dobândirea unei gândiri şi a unei tehnici matematice, precum şi a unor rezultate competiţionale. Aceste abilităţi sunt: intuiţia, capacitatea de observaţie selectivă, abordarea analitică, încadrarea teoretică, capacitatea de deducţie şi construcţie logică, viteza de calcul.

Materialul didactic necesar unui astfel de antrenament, anume culegerile de probleme, deşi prezente masiv pe piaţa publicaţiilor, în mare parte nu se ridică la un nivel profesional care să permită utilizatorului dezvoltarea abilităţilor matematice enumerate anterior.

Vorbind aici numai despre culegerile de probleme cu soluţii, acestea nu numai că nu oferă metodologii de rezolvare, cu atât mai puţin metodologii sistematizate, dar în marea lor majoritate sunt alcătuite prin selecţii lipsite de criterii metodice şi chiar de apartenenţă la un anumit domeniu sau subdomeniu matematic.

Multe dintre aceste culegeri rămân la stadiul de colecţii generale de probleme şi de exemple de soluţii prezentate ca atare, fără a avea o structură care să stimuleze şi să îmbunătăţească în vreun fel studiul individual, atât de necesar în perfecţionarea matematică a elevilor.

Acesta este şi motivul pentru care am lansat acest proiect editorial de realizare a unei colecţii de culegeri de probleme într-o formulă structurală nouă, prin care se intervine activ în procesul de studiu, tatonare, încercare şi rezolvare efectivă a problemelor, de la abordare şi încadrare teoretică, până la indicarea căii de rezolvare, a paşilor de executat şi generarea soluției complete.

În fapt, culegerea este structurată pe patru secțiuni separate şi independente, respectiv *Enunțuri*, *Ponturi*, *Algoritmi* şi *Demonstrații*, în această ordine.

Secțiunea **enunțurilor** cuprinde problemele propuse spre rezolvare, care sunt de nivel mediu şi avansat. Problemele sunt selectate din categoria celor a căror soluție se bazează exclusiv pe rezultate teoretice elementare învățate la clasă, nefiind însă vorba de aplicații directe ale teoriei. Sunt probleme care stimulează investigația individuală, ale căror soluții nu decurg automat din enunțuri, ci sunt rezultatul unui proces deductiv, constructiv şi de observație netrivial. Este vorba de probleme specifice cercurilor de matematică şi pregătirii concursurilor matematice.

Fiecare problemă are un corespondent de poziție în fiecare din cele trei secțiuni care urmează, aceste secțiuni conținând de fapt soluțiile progresive ale problemei:

Ponturile de rezolvare reprezintă un grup de cuvinte cheie (care pot fi cuvinte, grupuri de cuvinte, propoziții sau expresii matematice scurte) care au rolul de a sugera rezolvitorului în mod intuitiv, dar şi analitic: modul de abordare inițial al problemei, observații importante care stau la baza soluției, categorii de rezultate teoretice care se aplică în rezolvare şi rezultate teoretice specifice. Ponturile au şi rolul de a sugera indirect algoritmul de rezolvare (aflat în secțiunea următoare), fără însă a-l expune sau a-l sintetiza.

Toate aceste sugestii, indicații şi trimiteri sunt prezentate incomplet, într-o formă scurtă, lăsând rezolvitorului sarcina de a investiga diferitele opțiuni de abordare şi de a alege pe cea care deschide calea către rezolvarea corectă.

Algoritmii de rezolvare reprezintă ansamblurile cronologice ale paşilor de executat pentru generarea soluției complete. Algoritmul este prezentat sub forma unui rezumat şi nu compune soluția completă a problemei, ci doar punctează sarcinile şi temele parțiale ale căror rezultate vor alcătui în final construția logică a soluției.

Chiar şi aceste sarcini sunt redate condensat, fără a prezenta explicit obiectele matematice asupra cărora se va opera, ci făcând trimiteri precise la subiectele paşilor anteriori.

Rolul acestei incompletitudini voite a expunerii este acela de a lăsa în seama rezolvitorului identificarea exactă a obiectelor şi sarcinilor de lucru, în scopul reconstituirii integrale a soluției. Algoritmul are rolul de a indica direct calea exactă de urmat în rezolvarea problemei, precum şi metodologia aferentă fiecărui pas, fără a expune însă modul concret de lucru, modul de combinare a rezultatelor parțiale pentru formarea construcțiilor logice sau desfăşurarea detaliată a calculelor.

Aceste caracteristici elimină riscul unei abordări greşite a problemei sau al urmării unei căi de rezolvare fără finalitate şi totodată lasă loc suficient lucrului individual pentru completarea soluției integrale.

Demonstrațiile reprezintă soluțiile integrale ale problemelor, conținând întreaga rezolvare desfăşurată conform algoritmului de rezolvare. Prezentarea este completă, în sensul că nu sunt lăsate nedemonstrate unele rezultate parțiale, fie ca exercițiu sau ca fiind evidente sau uşor de dedus.

S-a urmărit expunerea completă a soluțiilor, incluzând detalierea paşilor de executat, observațiile premergătoare deducțiilor şi întreaga motivație logică, pentru ca materialul să poată fi parcurs, urmărit şi înțeles de o categorie cât mai largă de rezolvitori de probleme, nu numai de către cei cu un nivel de pregătire avansat.

Secțiunile descrise mai sus sunt separate în lucrare, astfel încât rezolvitorul să poată tatona problema şi să caute căi de rezolvare în mod independent, fără a vedea în acelaşi loc soluțiile progresive care urmează. Acesta poate consulta secțiunea următoare abia atunci când a epuizat fără succes metodele proprii de abordare şi studiu individual ale problemei.

În acest fel, rezolvitorul poate trece de la o soluție progresivă la alta mai completă după ce şi-a întrebuințat toate resursele proprii, acest efort suplimentar constituindu-se el însuşi într-un antrenament matematic util. Mai mult, procesul de preluare succesivă a indicațiilor problemelor, combinat cu cel de investigație individuală cu posibilitatea de autocorectare a unei abordări eronate, oferă rezolvitorului un plus de stimulare deosebit de benefică. Toate aceste elemente conferă acestui tip de culegere un real caracter interactiv.

Aşa cum am menționat, problemele prezentate sunt de nivel mediu şi avansat, iar soluțiile acestora pot fi urmărite şi de către rezolvitorii mai puțin abili în abordarea problemelor diferite de cele specifice programei şcolare de la clasă.

Problemele pot fi prezentate şi dezbătute la cercurile de matematică, şedinţele de pregătire a concursurilor şi olimpiadelor, precum şi la clasă, în cadrul lucrului diferenţiat pe grupe de elevi. Acestea au un spectru destul de larg în ceea ce priveşte gradul de dificultate, în culegere fiind prezente atât probleme mai simple, a caror cale şi metodă de rezolvare poate fi dedusă direct din enunţ, cât şi probleme mai dificile, mergând până la probleme de olimpiadă internaţională.

Majoritatea sunt probleme a căror rezolvare nu este imediată şi care nu reprezintă aplicaţii directe ale unui rezultat teoretic izolat, cadrul teoretic necesar rezolvării fiind mai complex.

Întâlnim şi probleme de tip “fals dificil”, în care enunţul crează falsa impresie a unei soluţii lungi şi laborioase, când de fapt schiţa soluţiei devine vizibilă imediat în urma unei observaţii a unui amănunt important ori a unei construcţii sau alegeri ingenioase. Acest tip de probleme ar trebui să constituie contraexemple frumoase pentru cei care au tendinţa de a pune din start eticheta de “imposibilă” unei probleme de matematică căreia nu reuşesc să îi deschidă “lacătul” din primele încercări şi chiar de a pune această etichetă matematicii însăşi.

Topica problemelor parcurge algebra de liceu, în special a claselor a noua şi a zecea, trecând prin domenii ca: numere întregi şi reale, ecuaţii, inegalităţi, puteri, logaritmi, divizibilitate, polinoame, combinatorică.

Selecţia celor 101 probleme a fost făcută cu atenţie, astfel încât să corespundă tuturor criteriilor metodologice urmărite, inclusiv a gradului de dificultate. Culegerea conţine practic trei categorii de probleme relativ la gradul de dificultate, dispuse consecutiv, între care trecerea se face gradual, astfel că întregul bloc de probleme propuse este unul omogen.

Materialul, prin structura sa, este util nu numai rezolvitorilor de probleme, dar şi profesorilor de matematică, fiind un instrument didactic care poate facilita dezvoltarea intuiţiei elevilor în abordarea problemelor de nivel mediu şi avansat, precum şi perfecţionarea abilităţilor algoritmice de rezolvare.

Rezolvarea de probleme presupune atât abilităţi teoretice şi analitice, dar şi algoritmice, dublate de o intuiţie matematică de bază.

Acest concept de culegere vine cu succes în sprijinul dezvoltării acestor abilități ale rezolvitorului, oferind totodată profesorilor de matematică modele de predare a rezolvării problemelor, ca parte integrantă a procesului de învățare a matematicii.

Lucrarea de față este prima dintr-o serie care va cuprinde şi alte domenii şi subdomenii matematice, culegerile fiind editate în aceeaşi formulă structurală, cu soluții progresive separate. Seria face parte dintr-un proiect publicistic de anvergură care are ca scop implicarea profesorilor şi tuturor absolvenților de matematică în editarea unor astfel de culegeri ineractive, în formule similare sau diferite, contribuind astfel la îmbogățirea materialului didactic suplimentar, atât de necesar studiului şi perfecționării în matematica şcolară şi de concurs.

ENUNȚURI

AL1.1.1 Rezolvaţi sistemul pentru *x*, *y* reali:

$$(x-1)(y^2+6)=y(x^2+1)$$
$$(y-1)(x^2+6)=x(y^2+1)$$

AL1.1.2 Considerăm şirul de întregi pozitivi care satisface relaţia $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2$ pentru orice $n \geq 3$.

Arătaţi că dacă $a_k = 1997$, atunci $k \leq 3$.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.5 Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) + 5 = 0$ nu are soluţii în numere raţionale.

AL1.1.6 Ştiind că $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = k^5$, unde *k* este număr întreg, găsiţi *k*.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.77 Se dau *n* numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferite de 0. Să se demonstreze că există un număr iraţional *a* astfel încât numerele $ax_i, i = 1, \ldots, n$ să fie iraţionale.

N. Ceti, V. Marchidan

AL1.1.78 Să se arate că numărul $N = 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5\cdot 6 + 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 + 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15 + \cdots$ nu este pătrat perfect, dacă numărul termenilor este mai mare ca 1.

C. Rusu

AL1.1.79 Să se afle restul împărţirii numărului 5^{7^n}, $n \in N$, prin 31.

D. Andrica

AL1.1.80 Să se demonstreze că
$\left|\sin 2x + 2\sin(x+y) - \sin 2y\right| \le 2\sqrt{2}$, oricare ar fi x, y numere reale.

D. Bătinețu

AL1.1.81 Fie 1000 de numere naturale nenule şi distincte, având suma 1000998. Demonstrați că printre ele există cel puțin două numere impare.

L. Niculescu

…………………….. parte lipsă ………………………….

AL1.1.95 Să se determine toate polinoamele $P \in R[X]$ cu proprietatea că $P(x^2) = P^2(x), \forall x \in R$.

AL1.1.96 Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există printre ele două care au suma sau diferența divizibilă cu 7.

I. Tomescu

…………………….. parte lipsă ………………………….

AL1.1.101 Fie P un polinom cu coeficienți complecşi. Să se demonstreze că funcția polinomială asociată este pară dacă şi numai dacă există un polinom Q cu coeficienți complecşi astfel încât
$P(x) = Q(x)Q(-x), \ \forall x \in C$

M. Țena

PONTURI

AL1.1.1 Adunarea şi scăderea ecuaţiilor; completarea pătratelor; substituţii.

AL1.1.2 Reducere la absurd; relaţia se aplică la două triplete diferite din patru termeni consecutivi; inegalităţi între numere care diferă prin cantităţi pozitive.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.5 Sumă de pătrate; substituţii; reducere la absurd; orice pătrat perfect este congruent cu 0 sau 1 modulo 4; teorema împărţirii cu rest; divizibilitate; paritate.

AL1.1.6 Ultimele cifre ale lui n şi n^5 sunt aceleaşi; membrul stâng este congruent cu 0 modulo 3; inegalităţi.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.77 Dacă m e prim, atunci $\sqrt{m}$ e iraţional; tabel cu n coloane şi o infinitate de linii; reducere la absurd; principiul de numărare; a, b raţionale implică a/b raţional.

AL1.1.78 Termeni multiplii de 10; restul împărţirii la 10; ultima cifră.

AL1.1.79 5^{3k+1}; 125 = 124 + 1.

AL1.1.80 Formula (sin a – sin b); împărţire cu $\sqrt{1+\sin^2(x-y)}$; proprietăţile funcţiilor trigonometrice sin şi cos.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.95 $P = 0$, $P = 1$; scrierea lui P în forma standard; $P = a_n X^n$; reducere la absurd; dacă polinoamele P şi Q sunt egale şi P conține un termen în X^m , atunci şi Q conține un astfel de termen.

AL1.1.96 Resturile pătratelor perfecte la împărțirea cu 7; teorema împărțirii cu rest; principiul de numărare; formula diferenței pătratelor a două numere; divizibilitate.

………………….. parte lipsă ……………………….

AL1.1.101 Forma standard a lui P; identificarea coeficienților; $P(x) = P_1(x^2)$; rădăcinile lui P_1; forma canonică a lui P_1; formula diferenței pătratelor a două numere.

ALGORITMI

AL1.1.1

Adunați cele două ecuații date.

Completați pătrate în ecuația rezultată.

Scădeți cea de-a doua ecuație dată din prima.

Grupați termenii şi scoateți factorul comun pentru a obține $(x-y)(x+y-2xy+7)=0$

Rearanjați termenii şi scoateți factor comun în factorul al doilea al produsului.

Faceți substituțiile $a = x - 5/2$ şi $b = y - 5/2$.

Rezolvați noul sistem în a şi b format din ultima ecuație şi prima ecuație obținută din adunarea celor două ecuații originale.

Aranjați termenii pentru a pune în evidență $a + b$.

Rezolvați ecuația de gradul doi în $a + b$.

Faceți o nouă substituție şi aranjați termenii pentru a pune în evidență $a - b$.

Găsiți valoarea lui $a - b$.

AL1.1.2

Reducere la absurd. Presupuneți că există $k > 3$ pentru care este verificată relația.

Considerați cei patru termeni care trebuie să existe.

Aplicați relația dată pentru cel de-al patrulea termen $a_k = 1997$ şi arătați că $a_{k-1} \leq 44$.

Aplicați relația dată pentru cel de-al treilea termen a_{k-1} şi arătați că $a_{k-1} \geq 61$, contradicție.

………………….. parte lipsă ……………………….

AL1.1.5

Completați pătrate în membrul stâng al ecuației şi scrieți-l ca o sumă de pătrate.

Arătați că ecuația dată este echivalentă cu $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ în numere întregi.

Reducere la absurd: presupuneți că există o soluție minimală (în sensul sumei valorilor absolute).

Arătați că orice pătrat perfect este congruent cu 0 sau 1 modulo 4, folosind teorema împărțirii cu rest.

Arătați că a, b, c, d sunt pare.

Arătați că (a/2, b/2, c/2, d/2) este o tot o soluție, care contrazice presupunerea de minimalitate.

AL1.1.6

Arătați că ultima cifră a membrului stâng este 4.

Arătați că $3 \mid k$ şi cea mai mică posibilitate pentru k este 144, iar următoarea este 174.

Arătați că fiecare putere din membrul stâng este mai mică decât un multiplu de 10^{10} şi adunați inegalitățile.

Arătați că membrul stâng este mai mic decât 10^{11}.

Arătați că k nu poate fi 170, deci nu poate fi nici 174.

………………….. parte lipsă ……………………….

AL1.1.77

Arătați că toate numerele $\sqrt{m}$, cu m prim, sunt iraționale.

Considerați toate numerele $\sqrt{m}$, cu m prim, şi notați-le prin $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$. Formați tabelul infinit $\left(y_i x_j\right)_{i=1,\infty}^{j=1,n}$ cu n coloane şi o infinitate de linii. Arătați că există o linie care conține numai numere iraționale:

Demonstrați prin reducere la absurd: Presupuneți că în fiecare linie există cel puțin un număr rațional. Arătați că există cel puțin o coloană care conține două numere raționale.

Arătați că raportul acestor două numere este irațional, contradicție.

AL1.1.78

Arătați că termenii de rang mai mare ca 3 sunt multiplii de 10.

Arătați că ultima cifră a lui N este 7.

Reducere la absurd: Presupuneți N pătrat perfect. Arătați că ultima cifră a lui N nu poate fi 7, contradicție.

AL1.1.79

Arătați că $5^{7^n} = 5^{3k+1}$, scriind 7 = 6 + 1.

Arătați că $5^{3k+1} = (31m+1)^k \cdot 5$, scriind 125 = 124 + 1.

Arătați că $5^{7^n} = 31q + 5$.

AL1.1.80

Notați cu $f(x, y)$ expresia din modul. Exprimați $f(x, y)$ scriind sin $2x$ – sin $2y$ ca un produs şi scoțând în factor comun forțat $t = \sqrt{1+\sin^2(x-y)}$.

Arătați că există $g(x, y)$ real astfel încât $\sin g(x,y) = \dfrac{\sin(x-y)}{t}$ şi $\cos g(x,y) = \dfrac{1}{t}$.

Înlocuiți aceste expresii în expresia lui $f(x, y)$ şi arătați că $|f(x, y)| \le 2\sqrt{2}$, folosind faptul că $|\sin a| \le 1, \forall a \in R$.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.95

Verificați că polinoamele $P = 0$ şi $P = 1$ satisfac condiția dată.

Presupuneți $P \ne 0, P \ne 1$. Arătați că P este de forma $a_n X^n$ prin reducere la absurd:

Scrieți P în forma standard cu coeficienții a_i şi gradul n.

Presupuneți că există $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ astfel încât $a_k \ne 0$ şi $a_s = 0$ pentru orice $s \in \{k+1, k+2, \dots, n-1\}$. Scrieți relația înlocuind coeficienții conform acestei presupuneri.

Studiați termenii în x^{n+k} în ambii membrii şi arătați că în membrul stâng nu există un astfel de termen, contradicție.

Scrieți egalitatea dată pentru $P = a_n X^n$ şi arătați că $a_n = 1$.

AL1.1.96

Arătați că resturile posibile la împărțirea unui pătrat perfect prin 7 sunt 0, 1, 2, 4, folosind teorema împărțirii cu rest.

Considerați cinci numere întregi oarecare şi pătratele acestora.

Aplicați proprietatea demonstrată anterior acestor pătrate.

Arătați că cel puțin două din aceste pătrate dau același rest la împărțirea cu 7 folosind principiul de numărare.

Exprimați diferența acestor pătrate şi arătați că suma sau diferența rădăcinilor lor pătrate este divizibilă cu 7.

………………….. parte lipsă ……………………….

AL1.1.101

Verificați că implicația "$\Leftarrow$" este evidentă ($P(x) = P(-x)$).

Pentru implicația "$\Rightarrow$" presupuneți că P este pară şi scrieți relația $P(x) = P(-x)$ folosind forma standard a polinomului P, cu coeficienți a_i şi gradul n.

Arătați că toți coeficienții termenilor cu puteri impare ale lui x sunt nuli.

Arătați că P se poate scrie ca $P(x) = P_1(x^2)$, oricare ar fi x real.

Considerați numerele $y_i \in C$ astfel încât $y_i^2 = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ şi $b \in C$ astfel încât $b^2 = (-1)^n a$ şi rescrieți relația obținută anterior.

Grupați factorii convenabil, folosiți formula diferenței pătratelor a două numere şi exprimați $P(x)$ sub forma $Q(x)Q(-x)$.

DEMONSTRAȚII

AL1.1.1

Adunăm cele două ecuații date. După simplificare şi completarea pătratelor, obținem ecuația:

$$\left(x-5/2\right)^2+\left(y-5/2\right)^2=1/2\,. \quad (1)$$

Scădem cea de-a doua ecuație din prima şi grupăm termenii:

$$xy(y-x)+6(x-y)+(x+y)(x-y)=xy(x-y)+(y-x)$$

$$(x-y)[-xy+6+(x+y)-xy+1]=0$$

$$(x-y)(x+y-2xy+7)=0$$

Rezultă că $x - y = 0$ sau $x + y - 2xy + 7 = 0$. Singurele posibilități de a avea $x - y = 0$ sunt $x = y = 2$ sau $x = y = 3$ (găsite rezolvând ecuația (1) prin substituția $x = y$). Toate soluțiile sistemului original cu $x \neq y$ vor fi soluții ale ecuației $x + y - 2xy + 7 = 0$. Această ecuație este echivalentă cu următoarea (obținută prin rearanjarea termenilor şi factorizare):

$$(x-1/2)(y-1/2)=15/4 \quad (2)$$

Acum rezolvăm ecuațiile (1) şi (2) simultan. Fie $a = x - 5/2$ şi $b = y - 5/2$. Atunci ecuația (1) este echivalentă cu

$$a^2+b^2=1/2\,. \quad (3)$$

şi ecuația (2) este echivalentă cu:

$$(a+2)(b+2)=15/4 \Rightarrow ab+2(a+b)=-1/4$$

$$\Rightarrow 2ab+4(a+b)=-1/2 \quad (4)$$

Adunând ecuația (4) cu ecuația (3), găsim:

$$(a+b)^2+4(a+b)=0 \Rightarrow a+b=0,-4 \quad (5)$$

Scăzând ecuația (4) din ecuația (3), găsim:

$$(a-b)^2-4(a+b)=1 \quad (6)$$

Observăm că dacă $a + b = -4$, atunci ecuația (6) este falsă. Deci, $a + b = 0$. Înlocuind aceasta în ecuația (6), obținem:

$$(a-b)^2=1 \Rightarrow a-b=\pm 1 \quad (7)$$

Deoarece $a + b = 0$, putem acum găsi toate perechile ordonate (a, b) cu ajutorul ecuației (7). Ele sunt $(-1/2, 1/2)$ şi $(1/2, -1/2)$.

Rezultă că singurele soluții pentru (x, y) sunt (2, 2), (3, 3), (2, 3) şi (3, 2).

AL1.1.2

Presupunem că pentru anumiți $k > 3$, $a_k = 1997$. Atunci, fiecare din numerele $a_{k-1}, a_{k-2}, a_{k-3}$ şi a_{k-4} trebuie să existe.

Fie $w = a_{k-1}$, $x = a_{k-2}$, $y = a_{k-3}$ şi $z = a_{k-4}$.

Conform condiției date, $1997 = w^2 + x^2 + y^2$. Astfel, $w \le \sqrt{1997} < 45$, şi cum w este întreg pozitiv, $w \le 44$.

Dar atunci $x^2 + y^2 \ge 1997 - 44^2 = 61$.

Pe de altă parte, $w = x^2 + y^2 + z^2$. Deoarece $x^2 + y^2 \ge 61$ şi $z^2 \ge 0$, $w = x^2 + y^2 + z^2 \ge 61$. Dar $w \le 44$, contradicție.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.5

Fie $u = 2x + 3$, $v = 2y + 3$, $w = 2z + 3$. Atunci ecuația dată este echivalentă cu $u^2 + v^2 + w^2 = 7$. A arăta că această ecuație are soluții în numere raționale este echivalent cu a arăta că ecuația $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ are soluții nenule în numere întregi.

Presupunem contrariul, anume că (a, b, c, d) este o soluție nenulă cu $|a| + |b| + |c| + |d|$ minim.

Arătăm mai întâi că orice pătrat perfect este congruent cu 0 sau 1 modulo 4. Într-adevăr, dacă $n = 4m + k$, cu $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci $n^2 = 16m^2 + 8mk + k^2$ şi se verifică uşor pentru $k = 0, 1, 2, 3$ că resturile împărțirii lui k^2 prin 4 pot fi doar 0 sau 1. Rezultă că resturile posibile la împărțirea lui n^2 prin 4 sunt tot 0, 1. Am arătat astfel că orice pătrat perfect are această proprietate.

Sub condiția de minimalitate impusă, avem că fiecare dintre a, b, c, d este congruent cu 0 modulo 4.

Astfel, trebuie să avem a, b, c, d pare, deci d este de asemenea par.

Dar atunci $(a/2, b/2, c/2, d/2)$ este de asemenea soluție a ecuației şi este o soluție mai mică (în sensul sumei modulelor), contradicție.

AL1.1.6

Ultimele cifre ale lui n şi n^5 sunt aceleaşi. Deci ultima cifră a membrului stâng este aceeaşi cu a numărului 3 + 0 +4 +7, adică 4.

Aşadar, ultima cifră a lui k este 4. Avem $133 \equiv 1\,(\text{mod } 3)$, $110 \equiv -1\,(\text{mod } 3)$, $84 \equiv 0\,(\text{mod } 3)$, $27 \equiv 0\,(\text{mod } 3)$, deci membrul stâng este congruent cu 0 modulo 3. Bineînțeles, $k > 133$. Rezultă că cea mai mică posibilitate pentru k este 144, iar următoarea este 174. $11^5 = (10+1)^5 = 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 1 = 161051$, deci $110^5 = 11^5 \cdot 10^5 = 1.61051\cdot 10^{10} < 2\cdot 10^{10}$. Evident, 27 şi 84 sunt mai mici decât 100, deci 27^5 şi 84^5 sunt mai mici decât 10^{10}.

Similar, $133^5 < (1331/10)^5 = 11^{15}/10^5 < 5\cdot 10^{10}$. Astfel, membrul stâng este mai mic decât 10^{11}. Dar $170^2 = 28900 > 28000$, $170^4 = 780000000 > 7\cdot 10^8$ şi $170^5 > 10^{11}$. Rezultă că singura posibilitate pentru k este 144.

…………………. parte lipsă ……………………….

AL1.1.77

Numerele de forma $\sqrt{m}$, cu m prim, sunt iraționale. Într-adevăr, pentru $m = 1$ propoziția este adevărată. Pentru $m > 1$, dacă presupunem prin absurd că $\sqrt{m} = \dfrac{a}{b}$, cu a, b întregi, iar fracția a/b o luăm ireductibilă, rezultă $mb^2 = a^2$, de unde $m \mid a^2$ şi cum m este prim, rezultă $m \mid a$. Rezultă că $a = mk$, cu k natural. Înlocuind, obținem $mb^2 = m^2k^2$, adică $b^2 = mk^2$. Conform unui raționament similar, rezultă că $m \mid b$. Deci $m > 1$ este un divizor comun al numerelor a şi b, contradicție.

Notăm aceste numere $\sqrt{m}$ prin $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$. Formăm următorul tabel infinit:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1x_1 & a_1x_2 & \ldots & a_1x_{n-1} & a_1x_n \\
a_2x_1 & a_2x_2 & \ldots & a_2x_{n-1} & a_2x_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_mx_1 & a_mx_2 & \ldots & a_mx_{n-1} & a_mx_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Vom demonstra proprietatea cerută prin reducere la absurd. Presupunem că pe fiecare linie există cel puţin un număr raţional. Deoarece avem o infinitate de linii şi numai *n* coloane, rezultă că există cel puţin o coloană cu două numere raţionale. Fie aceasta coloana elementelor x_q. Cele două numere raţionale vor fi de forma

$a_i x_q$ şi $a_j x_q$. Făcând raportul lor obţinem $\frac{a_i x_q}{a_j x_q} = \frac{a_i}{a_j}$. Dar a_i şi a_j fiind iraţionale şi numerele de sub radical fiind prime, rezultă că raportul lor este iraţional. Am ajuns la o contradicţie, anume ca un număr raţional să fie egal cu unul iraţional.

AL1.1.78

Toţi termenii de rang mai mare ca 3 sunt multiplii de 10, deoarece produsul conţine cel puţin un număr par şi un număr divizibil cu 5.

Rezultă că restul împărţirii lui *N* la 10 este $1+2\cdot 3=7$ şi deci 7 este ultima cifră a lui *N*.

Însă nu există niciun pătrat perfect a cărui ultimă cifră este 7, deoarece pătratele perfecte pot avea ultima cifră numai 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

AL1.1.79

Putem scrie numărul 5^{7^n} sub următoarele forme:

$$5^{7^n} = 5^{(6+1)^n} = 5^{3k+1} = 125^k \cdot 5 = (31m+1)^k \cdot 5 = (31p+1)\cdot 5 = 31q+5 .$$

Deci restul împărţirii numărului dat la 31 este 5.

AL1.1.80

Fie $f(x,y) = \sin 2x + 2\sin(x+y) - \sin 2y =$

$$= 2\sin(x-y)\cos(x+y) + 2\sin(x+y) =$$

$$= 2\sqrt{1+\sin^2(x+y)}\left(\frac{\sin(x-y)}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}\cos(x+y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}\sin(x+y)\right).$$

Dar $\left(\dfrac{\sin(x-y)}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}\right)^2=1$ şi deci există $g(x, y)\in R$ astfel încât:

$$\frac{\sin(x-y)}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}=\sin g(x, y) \quad \text{şi} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}=\cos g(x, y)$$

Înlocuind în expresia lui $f(x, y)$ găsită, obţinem:

$$|f(x, y)|=2\sqrt{1+\sin^2(x-y)}\,|\sin(x+y+g(x, y))|\le$$
$$\le 2\sqrt{1+\sin^2(x-y)}\le 2\sqrt{2}\,.$$

…………………… parte lipsă ………………………..

AL1.1.95

Se verifică simplu că polinoamele $P = 0$ şi $P = 1$ satisfac condiţia dată. Presupunem $P\ne 0, P\ne 1$. Fie $P\in R[X]$,
$P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$, $a_n\ne 0$.

$$P(x_2)=P^2(x), \forall x\in R \Leftrightarrow a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2(n-1)}+\cdots+a_1x^2+a_0=$$
$$=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)^2, \forall x\in R$$

Presupunem că există $k\in\{0, 1, \ldots, n-1\}$ astfel încât $a_k\ne 0$ şi $a_s=0$ pentru orice $s\in\{k+1, k+2, \ldots, n-1\}$, ceea ce este echivalent cu faptul că P nu este de forma a_nX^n. Avem atunci:

$$P(x)=a_nx^n+a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$P(x^2)=a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+a_{k-1}x^{2(k-1)}+\cdots+a_1x^2+a_0$$

Relaţia dată devine:

$$a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+\cdots+a_1x^2+a_0=\left(a_nx^n+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0\right)^2, \forall x\in R$$

În membrul drept al relaţiei de mai sus, coeficientul lui x^{n+k} este $2a_na_k\ne 0$, în timp ce în membrul stâng nu există un termen în x^{n+k}, deoarece $2n > n + k > 2k$. Prin urmare am ajuns la o contradicţie, deci presupunerea făcută este absurdă. Rezultă că $P=a_nX^n$. Înlocuind în relaţia dată, obţinem:

$$P(x^2)=P^2(x), \forall x\in R \Leftrightarrow a_nx^{2n}=a_n^2x^{2n}, \forall x\in R \Leftrightarrow a_n^2=a_n \Rightarrow a_n=1$$

Deci $P = X^n$.

Prin urmare, polinoamele care satisfac condiția din enunț sunt $P \in \{0, 1, X^n\}$.

AL1.1.96

Arătăm mai întâi că resturile posibile ale împărțirii oricărui pătrat perfect la 7 sunt 0, 1, 2 sau 4.

Într-adevăr, dacă $n = 7m + k$, cu $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, atunci $n^2 = 49m^2 + 14mk + k^2$ şi se verifică uşor pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ că resturile împărțirii lui k^2 prin 7 pot fi doar 0, 1, 2 sau 4. Rezultă că resturile posibile la împărțirea lui n^2 prin 7 sunt tot 0, 1, 2 sau 4. Am arătat astfel că orice pătrat perfect are această proprietate.

Fie acum a, b, c, d, e cinci numere întregi arbitrare. Conform proprietății de mai sus, pătratele lor nu pot da la împărțirea cu 7 decât unul din cele patru resturi 0, 1, 2, 4. Având cinci numere şi patru resturi, conform principiului de numărare, există cel puțin două pătrate care dau acelaşi rest la împărțirea cu 7. Există deci $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ astfel încât $x^2 - y^2 \,\vdots\, 7$. Dar $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ şi cum 7 este număr prim, deducem că 7 divide $x + y$ sau $x - y$.

………………….. parte lipsă ……………………….

AL1.1.101

Dacă există un polinom Q cu proprietatea din enunț, este evident că funcția polinomială P este pară, deoarece $P(-x) = Q(-x)\,Q(x) = P(x)$.

Reciproc, să presupunem că funcția polinomială P este pară. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, cu $a_i \in C, \forall i = 1, \ldots, n$.

Scriind $P(x) = P(-x)$, $\forall x \in C$ şi identificând coeficienții, rezultă că toți coeficienții termenilor cu puteri impare ale lui x sunt nuli. Deci putem scrie:

$$P(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} = P_1(x^2),\ \forall x \in C, \quad (1)$$

unde P_1 este un polinom de gradul n.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$ sunt rădăcinile polinomului P_1, putem scrie $P_1(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ cu $a \in C^*$ şi atunci (1) devine $P(x) = a(x^2 - x_1)(x^2 - x_2)\cdots(x^2 - x_n) =$
$= (-1)^n a(x_1 - x^2)(x_2 - x^2)\cdots(x_n - x^2)$. (2)

Fie numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C$ astfel încât $y_i^2 = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ şi de asemenea fie $b \in C$ astfel încât $b^2 = (-1)^n a$.

Relația (2) devine:

$$P(x) = b^2(y_1^2 - x^2)(y_2^2 - x^2)\cdots(y_n^2 - x^2) =$$
$$= [b(y_1 + x)(y_2 + x)\cdots(y_n + x)]\cdot[b(y_1 - x)(y_2 - x)\cdots(y_n - x)].$$

Luând $Q(x) = b(y_1 + x)(y_2 + x)\cdots(y_n + x)$ obținem
$P(x) = Q(x)Q(-x), \ \forall x \in C$.

Bibliografie

Revista *American Mathematical Monthly*, Volumul 116, Numărul 10, Decembrie 2007, SUA

Revista *American Mathematical Monthly*, Volumul 115, Numărul 6, Iunie-Iulie 2008, SUA

Revista *Kvant*, Numărul 3, 1970, URSS

Revista *Kvant*, Numărul 11, 1971, URSS

Revista *Kvant*, Numărul 2, 1978, URSS

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 4, 1977, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 5, 1977, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 12, 1977, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 3, 1979, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 8, 1979, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 1, 1980, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 8, 1980, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 11, 1980, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 4, 1981, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 5, 1981, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 9, 1981, România

Revista *Gazeta Matematică*, Numărul 10, 1981, România

N. Teodorescu, A. Constantinescu, M. Mihai, L. Pârşan, E. Perjariu, A. Popescu-Zorica, P. Radovici-Mărculescu, M. Țena, *Probleme din Gazeta Matematică – ediție selectivă şi metodologică*. Editura tehnică, Bucureşti, 1984.

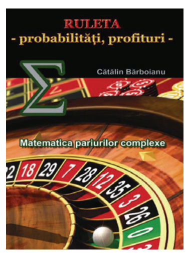
Proiect al editurii INFAROM

Această lucrare face parte din proiectul editorial Infarom de publicare a unei serii de culegeri de probleme de matematică într-o formulă structurală interactivă, prin contribuţii colective din partea profesorilor, studenţilor şi absolvenţilor facultăţilor de matematică. Contribuţiile de conţinut se fac în baza unei colaborări care asigură statutul complet de autor sau co-autor, în diferite formule de lucru şi financiare. Detaliile privind acest proiect şi înscrierea sunt postate pe site-ul editurii, la www.infarom.ro/culegeri.html .

Din colecţia de matematică aplicată,
***de acelaşi autor*:**

"Ce sunt şi cum se calculeaza şansele: Introducere în teoria probabilităţilor si ghid de calcul pentru începători, cu aplicaţii în jocurile de noroc şi viaţa de zi cu zi"
ISBN 9789738866256

"Ruleta - probabilităţi, profituri: Matematica pariurilor complexe"
ISBN 9789738866263



Cărţile pot fi achiziţionate din librăriile fizice sau virtuale.
Comenzile online prin site-ul editurii beneficiază de un discount de 15 – 20%: www.infarom.ro/shop